سلم تصحيح امتحان القياس

السنة الثالثة - فصل ثاني - 2024 - 2025

السؤال الأول:

القياس: ليكن R جبراً من أجزاء X، وليكن μ تابع حقيقي معرف على R

$\mu: R \to \mathbb{R}$ نقول عن μ أنه قياس إذا حقق الشرطين:

1) إذا كانت $A \in R \Leftarrow \mu(A) \geq 0$, $\mu(\emptyset) = 0$

2) من أجل أي متتالية $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ حيث $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

و $\bigcup A_i \in R$

$$\Leftarrow \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

القياس الخارجي: لتكن X مجموعة ما غير خالية نسمي التابع

$\mu^*: 2^X \to \mathbb{R}$ بالقياس الخارجي إذا حقق

1) $\mu^*(A) \geq 0$, $\mu^*(\emptyset) = 0$ $\quad \forall A \in 2^X$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

3) $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

بوتة الخارجية : نقول عن المجموعة A من 2^X انها قيوسة وفق μ^* اذا حققت الشرط التالي :

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall\ E \subseteq 2^X$$

or A' or $\hat{A}$

(2) (2)

(2)

الجبر : نقول عن الصف $\mathcal{R}$ انه جبر من اجزاء X اذا كان مغلقاً تحوي X

السؤال الثاني : (30) درجة

نشكل المجموعات

(5)
$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 \setminus A_1 \\ B_3 = A_3 \setminus (A_2 \cup A_1) \\ \vdots \\ B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \end{cases}$$

من الواضح ان (5) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

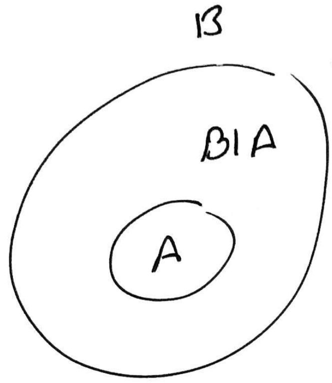
$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \overset{(5)}{=} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \overset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (5)$$

حيث ان $B_i \subseteq A_i \Rightarrow \mu(B_i) \leq \mu(A_i)$ (5)

السؤال الثالث : (20 درجة)

(1)



من الواضح أنه

5

$$B = A \cup (B \setminus A) \quad : \quad A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

5

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A))$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$ 5

وبما أن القياس موجب $\Leftarrow \mu(B \setminus A) \geq 0$

$$\mu(B) \geq \mu(A)$$

(2)

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A))$$

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$ 5

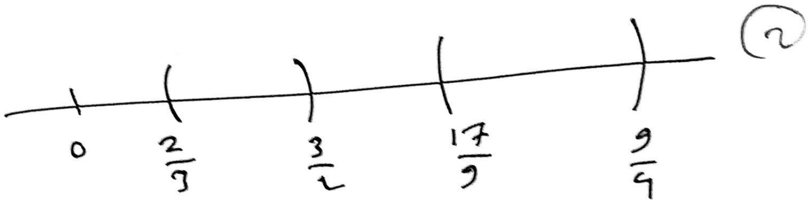
SCAN AnyScanner

السؤال الرابع (15 درجة)

بما أن كل مجال مفتوح هو مجموعة مقيسة (2) فإن A مجموعة مقيسة

$$n=1 \Rightarrow \left(1-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right) \quad (2)$$

$$n=2 \Rightarrow \left(2-\frac{1}{9}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{17}{9}, \frac{9}{4}\right) \quad (2)$$

$\Rightarrow$ 

أي أن الفترات منفصلة مثنى مثنى (غير متقاطعة)

$$\Rightarrow m(A) = m\left(\bigcup \left(n-\frac{1}{3^n}, n+\frac{1}{2^n}\right)\right) \quad (2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} m\left(n-\frac{1}{3^n}, n+\frac{1}{2^n}\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2^n} - n + \frac{1}{3^n}\right) \quad (1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \; (1) + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \; (1)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

سؤال خامس (15 درجة)

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = 0 \\ 2 & ; \ 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 5 & ; \ \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

ان نقاط القطع التي هي $0 , \frac{1}{2}$

$g(0) = 0$ (1) , $g(0^+) = 2$ (1)

$g(\frac{1}{2}) = 2$ (1) , $g(\frac{1}{2}^+) = 5$ (1)

$$(S) \int_0^1 f(x)\, dg(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} e^x g'(x)\, dx \ (1) + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^x \cdot g'(x)\, dx \ (1)$$

$$+ f(0)\left(g(0^+) - g(0)\right) \ (2) + f(\tfrac{1}{2})\left(g(\tfrac{1}{2}^+) - g(\tfrac{1}{2})\right) \ (2)$$

$$= e^0 (2 - 0) + e^{\frac{1}{2}} (5 - 2)$$

$$= 2 + 3e^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3}{e^2} \ (5)$$

د. صالح محمد

5